

TD 7

Exercice 1. (Méthode de la puissance)

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Soit $\lambda_N \in \mathbb{R}$ valeur propre de A tel que $|\lambda_N| = \rho(A)$ et soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$. On suppose que $-\lambda_N$ n'est pas une valeur propre de A et que $x^{(0)}$ n'est pas orthogonal à $\text{Ker}(A - \lambda_N \text{Id})$. On définit la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ par $x^{(n+1)} = Ax^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

1. $\frac{x^{(n)}}{\lambda_N^n} \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$, avec $x \neq 0$ et $Ax = \lambda_N x$.
2. $\frac{\|x^{(n+1)}\|}{\|x^{(n)}\|} \rightarrow \rho(A)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 2. (Méthode de la puissance)

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^N$. Pour calculer x tel que $Ax = b$, on considère la méthode itérative suivante :

- initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$,
- itérations : $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c$,

où $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^N$. et on suppose B symétrique. Montrer que :

1. $\frac{\|x^{(n+1)} - x\|}{\|x^{(n)} - x\|} \rightarrow \rho(B)$ quand $n \rightarrow \infty$. Ceci donne une estimation de la vitesse de convergence.
2. $\frac{\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|}{\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|} \rightarrow \rho(B)$ quand $n \rightarrow \infty$. Ceci donne une estimation de $\rho(B)$ au cours des itérations.

Exercice 3. (Continuité des valeurs propres)

1. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille $n \geq 1$ à coefficients dans \mathbb{C} . Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . En écrivant le système $Ax = \lambda x$ et en raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{k \neq i} |a_{i,k}|.$$

2. On munit l'espace $M_n(\mathbb{C})$ de la norme définie par :

$$\|B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_\infty}{\|x\|_\infty}, \quad \text{où } \|u\|_\infty = \max\{|u_k|, k \in \{1, \dots, n\}\}.$$

On rappelle que l'on a :

$$\|B\| = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n |b_{i,j}|.$$

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $C \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. On pose $M(\varepsilon) = M + \varepsilon C$ où $\varepsilon > 0$.

- a. Montrer qu'il existe une matrice P inversible, D diagonale et $D(\varepsilon)$ quelconque telles que

$$M = P^{-1}DP, \quad \text{et} \quad M(\varepsilon) = P^{-1}D(\varepsilon)P.$$

b. Soit $\lambda(\varepsilon)$ une valeur propre de $M(\varepsilon)$. Montrer qu'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$|\lambda(\varepsilon) - (D(\varepsilon))_{i,i}| \leq \sum_{k \neq i} |(D(\varepsilon))_{i,k}|.$$

c. Montrer que

$$\sum_{k \neq i} |(D(\varepsilon))_{i,k}| \leq \varepsilon \|C\| \text{Cond}(P).$$

d. Montrer qu'il existe une valeur propre λ de M telle que

$$|(D(\varepsilon))_{i,i} - \lambda| \leq \varepsilon \|C\| \text{Cond}(P).$$

e. En déduire que

$$|\lambda(\varepsilon) - \lambda| \leq 2\varepsilon \|C\| \text{Cond}(P).$$